Consideremos un intervalo muy breve de tiempo en el sistema S, es decir, un valor dado de t. Por lo tanto, para satisfacer esta ecuación, $t' + (v/c^2)\,x'$ debe tener un valor fijo definido. Esto significa que cuando más grande sea x' (o sea, entre más alejado esté un reloj en S' que está sobre el eje x') menor será t' (o sea, más retrasada en el tiempo parece su lectura). De aquí que los relojes en movimiento parecen estar fuera de fase, es decir, desincronizados. En la siguiente sección se verá que ésta no es más que otra manifestación del hecho de que dos eventos que ocurren simultáneamente en el sistema S, no se miden, en general, como simultáneos en el sistema S' y viceversa.

Todos los resultados obtenidos en esta sección pueden invertirse. Es decir, independientemente de cuál sea el sistema que consideremos sistema propio, el observador en el otro sistema mide una longitud contraída y un intervalo de tiempo dilatado (expandido) y encuentra que los relojes en movimiento no están sincronizados.

▶ *Ejemplo* 1. El factor $\sqrt{1-\beta^2}$ aparece en la ecuación 2-10, mientras que en la ecuación 2-12 aparece el factor $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Como éstos ocurren frecuentemente en la relatividad, es útil calcular sus valores en función de β. Ahora se calcularán $\sqrt{1-\beta^2}$ y $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ para $\beta = v/c = 0.100, 0.300, 0.600, 0.800, 0.900, 0.950$, y 0.990, y se graficarán como funciones de β.

Resulta que

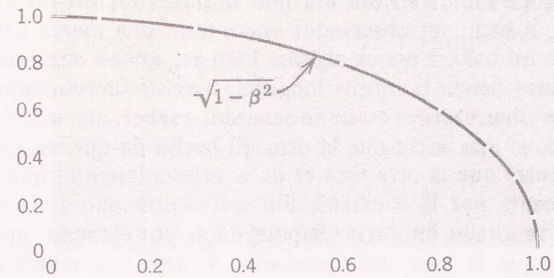
$\beta =$	0.100	0.300	0.600	0.800	0.900	0.950	0.990
$\sqrt{1-\beta^2} =$	0.995	0.954	0.800	0.600	0.436	0.312	0.141
$1/\sqrt{1-\beta^2} =$	1.005	1.048	1.250	1.667	2.294	3.205	7.092

Estos factores se grafican como función de β en la figura 2-3. ◀

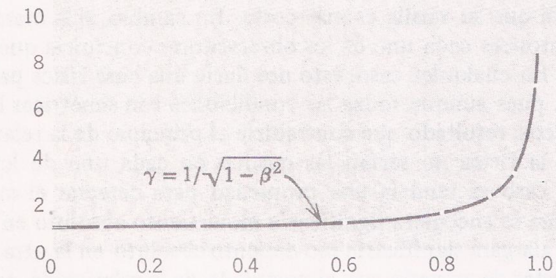
2.4 *Enfoque más físico de las características principales de las ecuaciones de transformacion de Lorentz*

Las características más notables de las ecuaciones de transformación de Lorentz son éstas: (A) Al medir las longitudes perpendiculares al movimiento relativo, se encuentra que son iguales en ambos sistemas; (B) el intervalo de tiempo indicado en un reloj lo encuentra más largo un observador para quien el reloj está moviéndose que otro que está en reposo con respecto al reloj; (C) las longitudes paralelas al movimiento relativo le parecen contraídas en comparación con las longitudes en reposo al observador para quien los cuerpos medidos están en movimiento; y (D) desde otro sistema inercial. Ahora volveremos a deducir estas características, una por una, lo cual haremos mediante experimentos imaginarios en torno al proceso de medición.

(A) *Comparación de longitudes perpendiculares al movimiento relativo.* Imaginemos dos sistemas cuyo movimiento relativo es v a lo largo de un eje común x-x'. En cada sistema un observador tiene una vara orientada hacia arriba



(*a*)



(*b*)

Fig. 2-3. (*a*) Gráfica de $\sqrt{1-\beta^2}$ en función de β. (*b*) Gráfica de $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ en función de β.

desde el origen y a lo largo de su eje vertical (y e y'), la que, al medirla resulta de una longitud (en reposo), pongamos por caso, de exactamente un metro. Cuando estos observadores se aproximan y se cruzan deseamos determinar si en el momento en que los orígenes coinciden, los extremos superiores de las varas coinciden también. Hacemos de manera que las varas se marquen recíprocamente de forma permanente al pasar una junto a la otra mediante un indicador delgado colocado en la mera punta de cada vara (por ejemplo, una navaja de rasurar o una cerda de brocha). (Las varas se colocan de tal manera que no choquen y siempre se conserven paralelas al eje vertical). Debe notarse que la situación es perfectamente simétrica. Cada uno de los observadores afirma que su vara es de un metro de largo, cada uno ve que la otra se acerca con la misma velocidad v, y cada uno sostiene que su vara está en posición perpendicular al movimiento relativo. Además, los dos observadores deben estar de acuerdo en cuanto al resultado de las mediciones, ya que están de acuerdo en cuanto a la simultaneidad de las mediciones (las mediciones ocurren en el instante en que los orígenes coinciden). Después de que las varas se han cruzado, una de dos, o cada uno de los observadores encontrará que su indicador fue marcado por el indicador del otro, o bien, un observador encontrará una marca debajo de su indicador, y el otro no hallará marca alguna. Esto es, ambos observadores comprobarán que las varas tienen la misma longitud, o existe un resultado absoluto, sobre el cual ambos observadores están de acuerdo, a saber, que una de las varas, y siempre la misma, es más corta que la otra. El hecho de que cada uno de los observadores encuentre que la otra vara es de la misma longitud que la suya, se deduce inmediatamente por la contradicción con el principio de la relatividad, que cualquier otro resultado indicaría. Supongamos, por ejemplo, que el observador S encuentra que la vara del observador S' dejó una marca en la suya (debajo del indicador) entonces concluirá que la vara de S' es más corta. Tal resultado es absoluto, pues el observador S' no encontrará ninguna marca en su vara y concluirá también que su vara es más corta que la suya. Este es un resultado absoluto, ya que el observador S' no encontrará marca sobre su varilla y *también* concluirá que su varilla es más corta. En cambio, si la marca quedara sobre la vara S', entonces cada uno de los observadores concluiría que la vara de S es la más corta. En cualquier caso, esto nos daría una base física para preferir un sistema al otro, pues aunque todas las condiciones son simétricas los resultados serían asimétricos, resultado que contradiría al principio de la relatividad. Es decir, las leyes de la física no serían las mismas en cada uno de los sistemas inerciales. En este caso se tendría una propiedad para detectar el movimiento absoluto. Si una vara se encogiera significaría movimiento absoluto en una dirección y si la otra se alargara significaría movimiento absoluto en la otra dirección. Por lo tanto, para estar de acuerdo con el postulado de la relatividad, se concluye que al medir la longitud de un cuerpo (o intervalo de espacios) perpendicular al movimiento relativo, el resultado será igual para todos los observadores inerciales.

(B) *Comparación de las mediciones de intervalos de tiempo.* El siguiente es un simple experimento que revela de un modo directo la relación cuantitativa que asocia el intervalo de tiempo que hay entre dos eventos, medido desde dos diferentes sistemas inerciales. Imaginemos a un pasajero que está sentado en un tren, que se mueve a velocidad uniforme v con respecto a tierra. El experimento consistirá en prender una linterna eléctrica, apuntada hacia un espejo colocado directamente encima del techo, y medir el tiempo que tarda la luz en viajar hacia arriba y reflejarse a su punto de salida. Esto se ilustra en la Fig. 2-4. Supongamos que el pasajero, quien tiene un reloj de pulsera, ve que el rayo de luz sigue una trayectoria estrictamente vertical (Fig. 2-4*a*) de A a B a C y toma el tiempo del evento con su reloj. Se trata de un intervalo de tiempo propio, medido con un solo reloj y en un solo lugar, cuando la salida y llegada del rayo de luz sucede en el mismo lugar en el sistema (S') del pasajero. Otro observador, fijo al sistema (S) en tierra, ve al tren y al pasajero moverse a la derecha, durante este intervalo. Dicho observador medirá el intervalo de tiempo entre lecturas en dos relojes estacionarios, uno que quedará en la posición que tenía cuando empezó al experimento (encendido de la linterna eléctrica) y el segundo que estará en la posición que tenía cuando finalizó el mismo (llegada de la luz a la linterna eléctrica). Por lo tanto, compara la lectura de un reloj en movimiento (el reloj del pasajero) con las lecturas en los dos relojes estacionarios. Para el observador S, los rayos de luz siguen la trayectoria oblicua que se muestra en la Fig. 2-4*c*. Así, el observador en

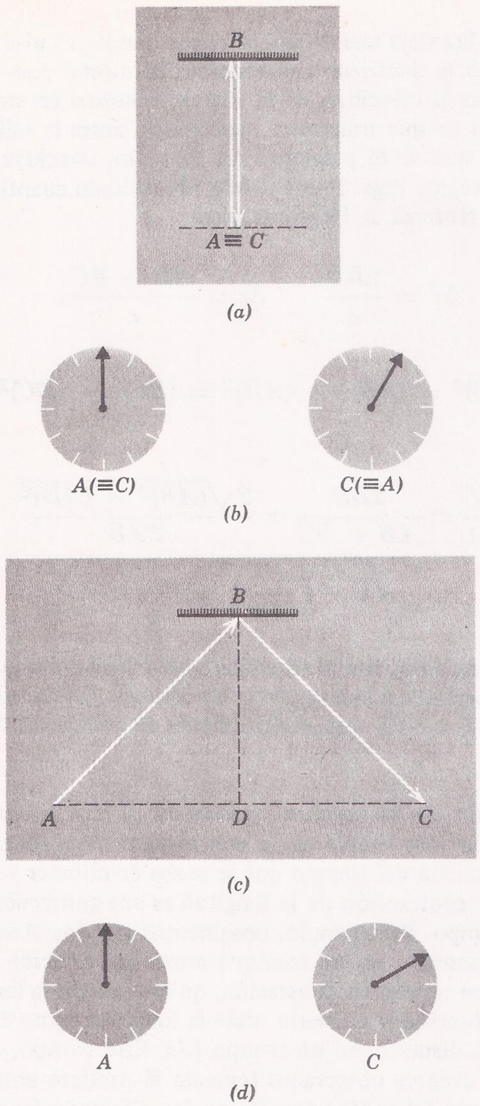


Fig. 2-4. (*a*) Trayectoria de un haz luminoso visto por un pasajero en el sistema S'. B es un espejo colocado en el techo, A y C son el *mismo* punto, o sea, en este sistema el foco de la linterna. (*b*) Lecturas hechas en el reloj del pasajero al principio y al final del evento, que muestran el intervalo de tiempo en un reloj que se mueve (sistema S'). (*c*) Trayectoria de un haz luminoso, vista por un observador en tierra (sistema S). A y C son las *diferentes ubicaciones* del foco de una linterna al principio y al final del evento, conforme se mueve hacia la derecha a una velocidad v en este sistema. (*d*) Lecturas hechas en *dos relojes estacionarios* (sincronizados) ubicados al principio del evento (A) y al final del mismo (C) (sistema S).

tierra calcula que la luz viaja una distancia mayor que la calculada por el pasajero (hemos visto ya que la distancia transversal es la misma para cada uno de los observadores). Como la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas, el observador en tierra ve que transcurre más tiempo entre la salida y llegada del rayo de luz que lo que ve el pasajero. Por lo tanto, concluye que el reloj del pasajero se retrasa (véanse Figs. 2-4*b* y 2-4*d*). El resultado cuantitativo se obtiene de inmediato por el teorema de Pitágoras, pues

$$\Delta t' = \frac{2BD}{c} \qquad \Delta t = \frac{AB + BC}{c};$$

pero

$$(BD)^2 = (AB)^2 - (AD)^2 = (BC)^2 - (DC)^2$$

de manera que

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{2BD}{AB + BC} = \frac{2\sqrt{(AB)^2 - (AD)^2}}{2AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{AD}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{2-13}$$

Aquí AD es la distancia horizontal recorrida a velocidad v durante el tiempo que la luz viajó con velocidad c a lo largo de la hipotenusa. Este resultado es idéntico a las ecuaciones 2-11 y 2-12, que anteriormente se dedujeron de un modo más formal.

(C) *Comparación de las longitudes paralelas al movimiento relativo.* Para obtener la deducción más simple de la contracción de la longitud se utiliza el resultado de la dilatación del tiempo que se acaba de obtener y así se demuestra directamente que la contracción de la longitud es una consecuencia necesaria de la dilatación del tiempo. Por ejemplo, imaginemos que dos observadores inerciales diferentes, uno sentado en un tren que cruza una estación a velocidad uniforme v, y el otro en reposo en la estación, quieren medir la longitud del andén de la estación. El observador en tierra mide la longitud como L y afirma que el pasajero cubrió esta distancia en un tiempo L/v. Este tiempo, Δt es un tiempo impropio, pues los eventos observados (cuando el pasajero entra en el andén y cuando el pasajero sale del andén) ocurren en dos diferentes lugares en el sistema (S) tierra y los tiempos se toman con dos relojes diferentes. Sin embargo, el pasajero observa que el andén se acerca y se aleja y encuentra que los dos eventos ocurren en el mismo lugar en su sistema (S'). Es decir su reloj (de pulsera, como dijimos) se halla en cada uno de los eventos en el instante que éstos ocurren. El mide un intervalo de tiempo propio $\Delta t'$, el cual, como acabamos de ver (ecuación 2-13), está relacionado con Δt por $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Pero $\Delta t = L/v$, de modo que $\Delta t' = L\sqrt{1 - v^2/c^2}/v$. El pasajero afirma que el andén se mueve con la misma velocidad v con respecto a él, de modo que habría medido la distancia de parte a parte del andén como $v\,\Delta t'$. Por lo tanto, la longitud del andén según él es $L' = v\Delta t' = L\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Este es el resultado de la contracción de la longitud, a saber, que un cuerpo de longitud L en reposo resulta de una longitud

$L\sqrt{1 - v^2/c^2}$, paralela al movimiento relativo, medida en un sistema en el que el cuerpo se mueve a una velocidad v.

La contracción de la longitud tiene otra consecuencia que, aunque es un poco más complicada, se relaciona directamente con la interpretación del experimento de Michelson-Morley. Consideremos una varilla que está en reposo en el marco de referencia S' y digamos que su longitud (en reposo) es L' (cabe notar que, en este ejemplo, la varilla está en reposo en el marco de referencia S', mientras que, en el ejemplo anterior el andén estaba en reposo en el marco de referencia S. Ya que en relatividad, las leyes deben ser independientes del marco de referencia usado y, por lo tanto, aquí debe obtenerse el mismo resultado físico, es decir, el observador que ve la varilla en movimiento encontrará que la longitud de ésta es menor que la longitud en reposo de la misma. Más adelante veremos que, en este ejemplo, para el observador S, la longitud de la varilla es menor, de acuerdo con el principio de la relatividad). Ponemos un foquito (*flash*) en un extremo y un espejo en el otro (ver Fig. 2-5*a*). El observador S' mide el tiempo que tarda un destello en ir del foquito al espejo y regresar al punto de partida. Este intervalo de tiempo, $\Delta t' = 2L'/c$, es propio, pues se mide con un solo reloj y en un mismo punto. ¿Cómo se verá esta secuencia de eventos desde el marco de referencia S? (Podemos considerar a este marco de referencia S como si se tratara del histórico marco de referencia del éter a través del cual el interferómetro de Michelson, el sistema S' se mueve a velocidad v). Mientras el pulso de luz viaja hacia el espejo y regresa al punto de partida, la varilla se mueve hacia la derecha (Fig. 2-5*b*). A continuación calcularemos el tiempo (Δt_1) que tarda el pulso en llegar al espejo. El pulso luminoso debe recorrer no sólo la distancia L (la longitud de la varilla en S), sino también la distancia $v\ \Delta t_1$ que el espejo ha recorrido durante este tiempo. Como en este marco de referencia la velocidad de la luz también es c, tenemos que $\Delta t_1 = (L + v\ \Delta t_1)/c$ o sea, $\Delta t_1 = L/(c - v)$.

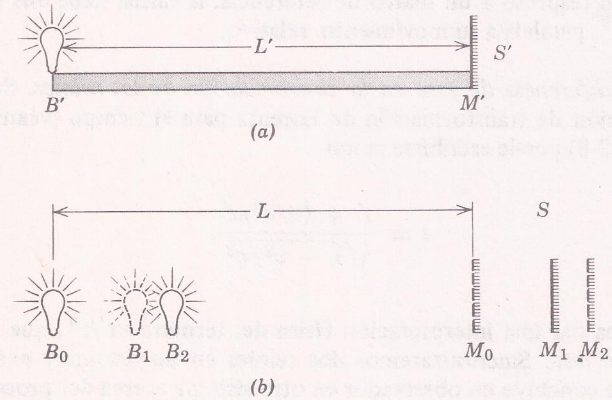


Fig. 2-5. (*a*) En el sistema S' la varilla está en reposo. Un bulbo B' se encuentra en un extremo y un espejo M' está en el otro extremo de una varilla de longitud L'. (*b*) Posiciones posteriores del foco y el espejo, en el sistema S, conforme el pulso luminoso sale de B_0 y se refleja de M_1 a B_2 cuando la varilla de longitud L se mueve hacia la derecha a una velocidad v.

Ahora calcularemos el tiempo Δt_2 que tarda el pulso de luz en regresar del espejo al foquito. En este caso, el pulso de luz recorre una distancia menor a L, debido a que, durante este tiempo, el foquito se ha movido hacia la derecha. Por lo tanto, $\Delta t_2 = (L - v\,\Delta t_2)/c$ o sea, $\Delta t_2 = L/(c + v)$. Por lo tanto, el tiempo total para el recorrido de ida y vuelta es

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2c\mathrm{L}}{c^2 - v^2} = \frac{(2L/c)}{(1 - v^2/c^2)}.$$

Este intervalo de tiempo no es propio, ya que se mide con dos relojes que están en diferentes lugares de S (en B_0 y B_2). La ecuación 2-13, $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$, da la relación existente entre los intervalos de tiempo propio e impropio de estos dos eventos (la emisión de un pulso luminoso desde el foquito y el regreso de dicho pulso al foquito). Si substituimos a $\Delta t'$ por su valor $\dfrac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$,

obtenemos

$$\frac{2L'}{c} = \frac{2L}{c}\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v^2/c^2)},$$

de donde se deduce que

$$L = L'\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{2-14}$$

Así se encuentra que la varilla mide L' en reposo y que, cuando se mueve a una velocidad con respecto a un marco de referencia, la varilla tiene una longitud de $L'\sqrt{1 - v^2/c^2}$, paralela a su movimiento relativo.

(D) *La diferencia de fase en la sincronización de los relojes.* Se recordará que la ecuación de transformación de Lorentz para el tiempo (véanse las ecuaciones 2-7 y 2-8) puede escribirse como

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Aquí se desea dar una interpretación física del término vx'/c^2, que llamaremos *diferencia de fase.* Sincronizaremos dos relojes en un sistema y examinaremos qué es lo que concluye un observador en otro sistema acerca del proceso.

Imaginemos que tenemos dos relojes, A y B, en reposo en el sistema S'. Su separación es L' en este sistema. Se dispara un destello de magnesio, exactamente en el punto medio y se instruye a los observadores que están junto a los relojes que los pongan a que marquen $t' = 0$ cuando la luz llegue hasta ellos (véase la Fig. 2-6*a*). Este es un procedimiento previamente concertado para sincronizar dos relojes separados (véase la sección 2-1). Ahora consideramos este proceso de

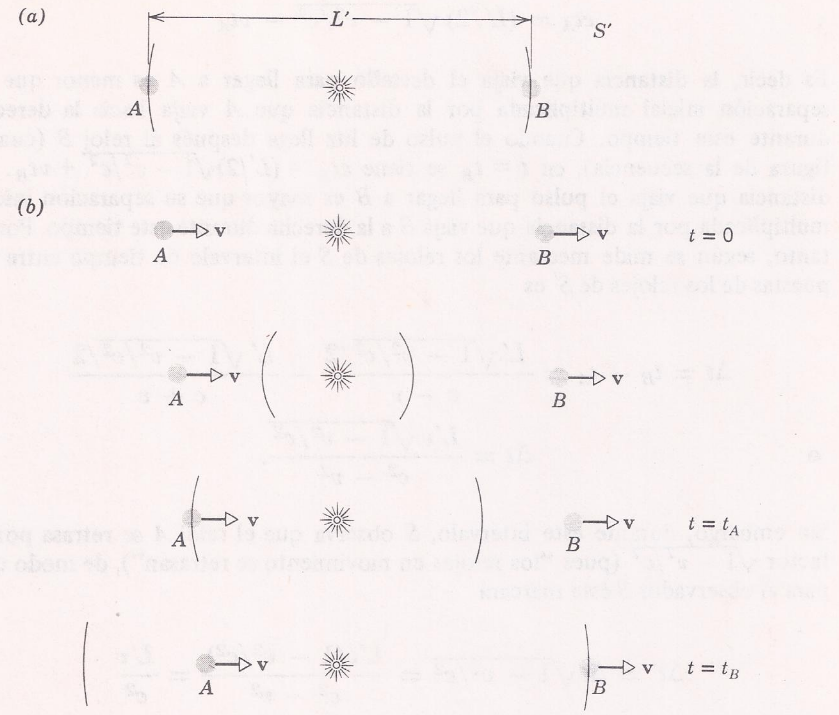


Fig. 2-6. (*a*) El destello enviado desde el punto medio entre los relojes A y B, que están en reposo en el sistema S' y separados una distancia L', llega simultáneamente a A y B. (*b*) Secuencia de eventos vista desde el sistema S, donde los relojes están separados una distancia L y se mueven hacia la derecha a una velocidad v.

sincronización según lo ve un observador en el sistema S, para quien los relojes A y B se mueven hacia la derecha (véase la Fig. 2-6*b*) a velocidad v.

Para el observador en S, la separación de los relojes será $L'\sqrt{1 - v^2/c^2}$. El observa la siguiente secuencia de eventos. El destello sale del punto medio, viajando en todas direcciones a una velocidad c. Mientras el frente de onda avanza con una rapidez c, los relojes se mueven hacia la derecha a una velocidad v. El reloj A es el primero en interceptar el destello, antes que B, y el observador A pone su reloj en $t' = 0$ (tercera figura de la secuencia). Por lo tanto, por lo que se refiere al observador en S, A pone su reloj en tiempo cero *antes que B*, así que la puesta de los relojes de S, no es simultánea a la del observador en S. Aquí vemos de nuevo la relatividad de la simultaneidad; es decir, los relojes en el sistema S' *no* se sincronizan de acuerdo con el observador en S, quien utiliza exactamente el mismo procedimiento para sincronizar sus relojes.

¿En cuánto diferirán las lecturas de los relojes de S' según el observador en S? Sea $t = 0$ el instante en que S ve el destello. Luego, cuando el destello de luz llega al reloj A, en el tiempo $t = t_A$ se tiene

$$ct_A = (L'/2)\sqrt{1 - v^2/c^2} - vt_A.$$

Es decir, la distancia que viaja el destello para llegar a A es menor que su separación inicial multiplicada por la distancia que A viaja hacia la derecha durante este tiempo. Cuando el pulso de luz llega después al reloj B (cuarta figura de la secuencia), en $t = t_B$ se tiene $ct_B = (L'/2)\sqrt{1 - v^2/c^2} + vt_B$. La distancia que viaja el pulso para llegar a B es mayor que su separación inicial multiplicada por la distancia que viaja B a la derecha durante este tiempo. Por lo tanto, según se mide mediante los relojes de S el intervalo de tiempo entre las puestas de los relojes de S' es

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{L'\sqrt{1 - v^2/c^2}/2}{c - v} - \frac{L'\sqrt{1 - v^2/c^2}/2}{c + v}$$

o

$$\Delta t = \frac{L'v\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c^2 - v^2}.$$

Sin embargo, durante este intervalo, S observa que el reloj A se retrasa por el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (pues "los relojes en movimiento se retrasan"), de modo que para el observador S éste marcará

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{L'v(1 - v^2/c^2)}{c^2 - v^2} = \frac{L'v}{c^2}$$

cuando el reloj B se pone para marcar $t' = 0$.

El resultado es que el observador S encuentra que los relojes de S' no están sincronizados con el reloj A y que marcan un tiempo adelantado por una cantidad $L'v/c^2$. Cuanto mayor sea la separación L' de los relojes en el sistema S' más retrasado marcará el tiempo el reloj B, según se observa desde el sistema S en un instante dado. Esto está en conformidad exacta con la ecuación de transformación de Lorentz para el tiempo.

Por lo tanto, todas las características de las ecuaciones de transformación de Lorentz –las que dedujimos directamente de un modo formal de los postulados de la relatividad en la sección 2-2– pueden deducirse más de acuerdo con la física a partir de los procesos de medición que se escogieron originalmente para estar de acuerdo con esos postulados.

➧ *Ejemplo* 2. ¿Por qué el hecho de que la simultáneidad no es un concepto absoluto, es un resultado imprevisto para la mentalidad clásica? Pues porque la velocidad de la luz tiene un valor enorme comparado con las velocidades ordinarias. Consideremos estos dos casos, simétricos por lo que se refiere a intercambio de las coordenadas de espacio y tiempo.

Caso 1: S' observa que ocurren dos eventos en el mismo lugar, pero están separados en el tiempo; entonces, S declarará que los dos eventos acaecen en diferentes lugares. *Caso 2:* S' observa que ocurren dos eventos en el mismo instante, pero están separados en el espacio; entonces S declarará que los dos eventos ocurren en tiempos diferentes. Por la experiencia diaria, el Caso 1 se acepta fácilmente si un hombre (S') sobre un tren en movimiento enciende dos